



Jenis Artikel: *orginal research*

# Magnetohidrodinamika pada Selinder Sembarang dengan Kelengkungan dan Puntiran

Abd Mujahid Hamdan<sup>\*1,2</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Teknik Arsitektur Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Ar-Raniry Banda Aceh

<sup>2</sup> Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Tarbiyah dan Keguruan Universitas Islam Negeri Ar-Raniry Banda Aceh

*\*Corresponding e-mail:* [abd.mujahid.hamdan@gmail.com](mailto:abd.mujahid.hamdan@gmail.com)

## KATA KUNCI

magnetohidrodinamika, sistem koordinat germano

**ABSTRAK.** Koordinat Germano telah digunakan untuk menjelaskan dinamika fluida pada geometri selinder sembarang. Sistem koordinat tersebut jugatelah digunakan pada geofisika dan bidang keteknikan lainnya, seperti untuk menjelaskan longsoran salju dan aliran fluida pada pipa heliks. Namun, belum pernah dilakukan penelitian mengenai magnetohidrodinamika pada geometri tersebut. Pada makalah ini, dengan menggunakan sistem koordinat tersebut disajikan persamaan kontinuitas dan kelestarian momentum magnetohidrodinamika baik yang ideal maupun yang memperhitungkan viskositasnya.

Diserahkan:

Direvisi:

Diterima:

Diterbitkan

Terbitan daring: 16 juli 2020

## 1. Pendahuluan

Magnetohidrodinamika adalah kajian teoritik yang menjelaskan dinamika fluida yang membawa medan magnet dan listrik dalam skala makroskopis (Gomez dkk., 2013). Secara umum, objek fisika pada kajian ini adalah perpaduan antara mekanika fluida klasik dan elektrodinamika. Dari sisi penerapan, magnetohidrodinamika digunakan untuk menjelaskan plasma kosmik (Cui dkk., 2015) teori medan magnetik bumi (Aurnou, J. dkk, 2003), dan astrofisika (Gu dkk., 2013).

Penggunaan sistem Koordinat Germano (KG) telah berhasil dengan baik menyajikan dinamika fluida pada pipa dengan kelengkungan dan puntiran, misal pada pipa heliks yang berotasi (Alam dkk., 2007) dan dinamika aliran longsor granular yang kanalnya diserupakan dengan kanal pipa tak seragam (Pudasaini dkk., 2007).

Pada makalah ini, dengan menggunakan sistem KG akan disajikan persamaan kelestarian massa atau yang disebut dengan persamaan kontinuitas Eularian dan persamaan kelestarian energi dan momentum pada magnetohidrodinamika. Pada persamaan tersebut, kelengkungan dan puntiran diperhitungkan sebagai salah satu penentu perilaku magnetohidrodinamika. Salah satu proyeksi praktis dari persamaan-persamaan tersebut adalah pada prediksi dinamika aliran lava yang mengalir dari dapur magma menuju mulut kawah saat terjadinya letusan gunung api. Proyeksi berikutnya adalah penggunaannya pada aliran lava yang mengalir pada

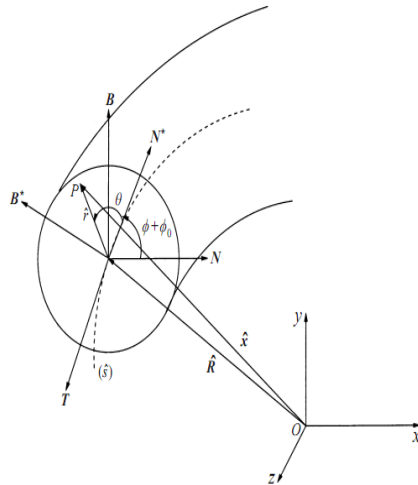
kanal di badan gunung yang diasumsikan sebagai kanal selinder tak seragam. Sehingga, diharapkan persamaan kontinuitas dan kelestarian momentum berikut dapat menjadi pijakan bagi geofisikawan dalam prediksi bahaya dan resiko kebencanaan letusan gunung api.

## 2. Metrik Koordinat Germano

Terdapat kurva parametrik  $C(s)$  dalam ruang Euclidian,  $C(s) \in E$  yang setiap titiknya memiliki vektor posisi  $\hat{R}(s)$  yang berasal dari kerangka acuan kartesian sembarang. Setiap titik yang merupakan anggota himpunan dari kurva  $C(s|s \in C)$  menjadi titik asal vektor bagi vektor Tangensial ( $\mathbf{T}$ ), vektor Normal ( $\mathbf{N}$ ) dan vektor binormal ( $\mathbf{B}$ ). Ketiga vektor tersebut saling orthonormal. Akibat puntiran (*torsion*)  $\tau$ , maka terdapat vektor satuan  $\mathbf{N}^*$  yang membentuk sudut  $(\phi + \phi_0)$  terhadap  $\mathbf{N}$  dengan  $\phi_0$  adalah sudut sembarang seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 1.

Sementara puntiran didefinisikan sebagai:

$$\tau(s) = -\frac{d\phi(s)}{ds}. \quad (1)$$



Gambar. 1 Sistem Koordinat Germano (Gammack dkk., 2001).

Setiap  $s$  menjadi pusat penampang polar  $\mathbb{R}^2$  yang tegak lurus terhadap  $\mathbf{T}$  yang merupakan penampang dari sebuah selinder sembarang  $\mathbb{R}^3$ . Sehingga untuk semua  $x = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^3$  dan  $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  yang jaraknya dapat dinyatakan dalam vektor posisi  $\hat{x}$ . Metrik dari sistem ini adalah:

$$ds^2 = g_{pq} dx^1 dx^2, \quad (2)$$

dengan  $x^1 = s$ ,  $x^2 = r$ , dan  $x^3 = \theta$ . Dengan menggunakan hubungan pada rumusan Frenet- Serret, maka tensor metrik kontravariannya adalah:

$$g_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \kappa r \sin(\theta + \phi + \phi_0))^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Sehingga determinan dari tensor tersebut adalah:

$$g = r^2 (1 + \kappa r \sin(\theta + \phi + \phi_0))^2, \quad (4)$$

dan

$$\sqrt{g} = r + \kappa r^2 \sin(\theta + \phi + \phi_0). \quad (5)$$

Dengan demikian, tensor metrik konjugasinya adalah:

$$g^{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1 + \kappa r \sin(\theta + \phi + \phi_0))^2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

### 3. Magnetohidrodinamika Pada Sistem KG

#### 3.1 Magnetohidrodinamika Ideal

Serupa dengan mekanika fluida, magnetohidrodinamika juga dapat disajikan dalam bentuk persamaan kontinuitas dan kelestarian momentum dalam keadaan ideal. Keadaan ideal berarti tanpa menghitung visikositas, rotasi, gravitasi, ionisasi, panas, konduksi, radiasi dan kerapatan dalam keadaan tak gayut ruang dan waktu. Persamaan kontinuitas dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \chi) = 0. \quad (7)$$

Sedangkan persamaan momentumnya dapat dituliskan sebagai:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \chi \cdot \nabla \right) \chi = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (8)$$

atau

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \chi \cdot \nabla \right) \chi = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right). \quad (9)$$

dengan  $\rho$  adalah densitas,  $\chi$  adalah kecepatan,  $p$  adalah tekanan,  $\mathbf{J}$  adalah rapat arus, dan  $\mathbf{B}$  adalah medan magnet (Powel, K.G. dkk, 1999).

Dengan menggunakan metrik KG pada persamaan (3) dan (6) maka diperoleh persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} \chi^j) \right) = 0, \quad (10)$$

dan persamaan kelestarian momentum berupa:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \delta_j^i \chi^j \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}) \right) \right) \chi^i \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left( \delta_j^i B^j \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}) \right) \right) B^i. \quad (11) \\ & -g^{tr} \frac{\partial}{\partial x^r} \left( p + \frac{(B)^2}{2\mu_0} \right) \end{aligned}$$

dengan  $\delta_j^i$  adalah delta kronecker. Persamaan (10) dan (11) adalah bentuk umum untuk semua kurvalinier yang bentuknya ditentukan oleh bentuk metrik dari sistem koordinat dan transformasi koordinat yang dipilih.

Jika,

$$\psi = r + \kappa r^2 \sin(\theta + \phi + \phi_0), \quad (12)$$

maka persamaan kelestarian momentum tersebut dapat dituliskan pada masing-masing komponen  $s, r$  dan  $\theta$  yang untuk komponen  $s$  dari persamaan tersebut adalah:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial \chi_s}{\partial t} + \chi_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_s) \right) \right. \\ & \quad + \chi_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_r \right) \right) \\ & \quad \left. + \chi_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_s) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left( B_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi B_s) \right) \right. \\ & \quad + B_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} B_s \right) \right) \\ & \quad \left. + B_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r B_s) \right) \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial s} \left( p + \frac{(B)^2}{2\mu_0} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Jika kelengkungan dan puntiran dienyapkan, maka persamaan tersebut serupa dengan persamaan magnethidrodinamika pada selinder untuk komponen yang searah dengan tinggi selinder. Hal ini disebabkan karena persamaan (12) hanya menyisakan  $\psi = r$ . Persamaan (12) dapat hadir hanya jika salah satu dari  $\tau$  dan  $\kappa$  hadir pada sistem.

Sedangkan untuk komponens  $r$  adalah:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \chi_r}{\partial t} + \chi_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_r) \right) \\ & + \chi_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_r \right) \right) \\ & + \chi_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_r) \right) \end{aligned} \right) \\
 & = \frac{1}{\mu_0} \left( \begin{aligned} & B_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi B_r) \right) \\ & + B_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} B_r \right) \right) \\ & + B_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r B_r) \right) \end{aligned} \right), \quad (14) \\
 & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( p + \frac{(B)^2}{2\mu_0} \right)
 \end{aligned}$$

dan untuk komponen  $\theta$  adalah:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \chi_\theta}{\partial t} + \chi_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_\theta) \right) \\ & + \chi_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_\theta \right) \right) \\ & + \chi_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_\theta) \right) \end{aligned} \right) \\
 & = \frac{1}{\mu_0} \left( \begin{aligned} & B_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi B_\theta) \right) \\ & + B_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} B_\theta \right) \right) \\ & + B_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r B_\theta) \right) \end{aligned} \right). \quad (15) \\
 & - \frac{r}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( p + \frac{(B)^2}{2\mu_0} \right)
 \end{aligned}$$

Jika kurva dalam keadaan kontinu maka,

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = r^2 \left( \begin{aligned} & \kappa \frac{\partial (\sin(\theta + \phi + \phi_0))}{\partial s} \\ & + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \sin(\theta + \phi + \phi_0) \end{aligned} \right), \quad (16)$$

atau

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = r^2 \left( \kappa \frac{\partial (\sin(\theta - \tau s + \phi_0))}{\partial s} + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \sin(\theta + \phi + \phi_0) \right), \quad (17)$$

dengan

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \right) = \kappa \sin(\theta + \phi + \phi_0). \quad (18)$$

### 3.2 Magnetohidrodinamika dengan Visikositas

Kehadiran visikositas pada magnetohidrodinamika menyebabkan persamaan kelestarian momentumnya dituliskan sebagai:

$$\rho \frac{D\chi}{Dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \eta \nabla^2 \chi + \left( \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \chi) + \mathbf{F}^{luar}, \quad (19)$$

dengan  $\eta$  adalah visikositas geser,  $\xi$  adalah visikositas bulk dan  $\mathbf{F}$  adalah gaya luar yang mempengaruhi dinamika (Jeffrey, A. dkk 1966), . Sehingga jika disajikan dalam bentuk memuat komponen tensor metrik kovarian dan atau kontravarian, maka persamaan kelestarian momentum (19) menjadi:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \delta_j^i \chi^i \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g}) \right) \right) \chi^j \\ &= -g^{kr} \frac{\partial p}{\partial x^r} + \frac{\mu}{c} \varepsilon_{ijk} J_j H_k \\ &+ \eta \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sqrt{g} g^{kr} \frac{\partial \chi^j}{\partial x^r} \right) \right) \\ &+ \left( \xi + \frac{1}{3} \eta \right) g^{kr} \frac{\partial}{\partial x^r} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} \chi^j) \right) \\ &+ \mathbf{F}^{luar}. \end{aligned} \quad (20)$$

Dengan tensor metrik pada persamaan (3) dan (6) maka persamaan kelestarian momentum pada komponen s adalah:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial \chi_s}{\partial t} + \chi_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_s) \right) \right) \\
 & \rho \left( + \chi_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_s \right) \right) \right. \\
 & \left. + \chi_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_s) \right) \right) \\
 & = - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\mu}{c} (J_r H_\theta - H_r J_\theta) \\
 & + \eta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} \left( \psi \frac{\partial \chi_s}{\partial s} \right) + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r^2} \frac{\partial \chi_s}{\partial r} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r^2 \frac{\partial \chi_s}{\partial \theta} \right) \right) \\
 & + \left( \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_s) \right) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_r \right) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_\theta) \right) \right) + F_s. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Untuk komponen r adalah:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( \frac{\partial \chi_r}{\partial t} + \chi_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_r) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \chi_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_r \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \chi_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_r) \right) \right) \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{c} (J_\theta H_s - H_\theta J_s) \\
 & \quad + \eta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} \left( \psi \frac{\partial \chi_r}{\partial s} \right) + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r^2} \frac{\partial \chi_r}{\partial r} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r^2 \frac{\partial \chi_r}{\partial \theta} \right) \right) \\
 & \quad + \left( \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_s) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_r \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_\theta) \right) \right) \Bigg) \\
 & + F_r
 \end{aligned} \tag{22}$$

Untuk komponen  $\theta$ ,



$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial \chi_\theta}{\partial t} + \chi_s \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_\theta) \right) \right) \\
 & \rho \left( \chi_r \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_\theta \right) \right) \right. \\
 & \left. + \chi_\theta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_\theta) \right) \right) \\
 & = - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{c} (J_s H_r - H_s J_r) \\
 & + \eta \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial s} \left( \psi \frac{\partial \chi_\theta}{\partial s} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r^2} \frac{\partial \chi_\theta}{\partial r} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r^2 \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} \right) \right) \\
 & + \left( \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \left( \frac{r^2}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial s} (\psi \chi_s) \right) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi}{r} \chi_r \right) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \chi_\theta) \right) \right) \Bigg) + F_\theta \quad (23)
 \end{aligned}$$

#### 4. Penutup

Dari keseluruhan persamaan kontinuitas dan kelestarian momentum terlihat bahwa kelengkungan dan puntiran menjadi parameter yang sangat fundamental dalam magnetohidrodinamika pada selinder sembarang. Tentu persamaan tersebut masih berupa kajian teoritik yang belum dapat langsung digunakan tanpa analisis numerik dan teknik komputasi dan pemodelan.

#### Ucapan Terimakasih

Terimakasih kepada semua pihak yang telah memberi kesempatan untuk melakukan penelitian ini.

#### Keterlibatan Penulis

Abd.MH melakukan pengumpulan data dan menulis naskah original dan revisi. Memberi gagasan pokok pengembangan. serta memberi gagasan pokok ide penelitian.

#### Daftar Pustaka

- Gomez, D., Martin, L.N dan Dmitruk, P. 2013. Magnetohydrodynamics in solar and space physics. *Advances in Space Research*, 51, 1916-1923.
- Cui, W., Ou, Y dan Ren, D, 2015. Incompressible limit of full compressible magnetohydrodynamic equation with well-prepared data in 3-D bounded domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 427, 263-288.
- Aurnou, J., Andreadis, S., Zhu, L., dan Olson, P. 2003. Experiments on convection in Earth's core tangent cylinder, *Earth and Planetary Science Letter*, 212, 119-134
- Gu, F., Lu, Y., dan Zhang, Q. 2013, Global solutions to one-dimensional shallow water magnetohydrodynamic equations *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 401, 714-723
- Alam, M.M., Ota, M., Ferdows, M., Islamv, M.N., Wahiduzzaman, dan Yamamoto, K. 2007. Flow through a rotating helical pipe with a wide range of the Dean number, *Arch. Mech.*, 59, 501-517

- Pudasaini, S.P., dan Hutter, K., 2007. *Avalanche Dynamics: Dynamics of Rapid Flows of Dense Granular Avalanches*, Springer, Newyork, p.130
- Gammack, D dan Hydon, P.E. 2001. Flow in pipes with non-uniform curvature and torsion. *Journal Fluid Mechanics*, **433**, 357-382.
- Powel, K.G, Roe, P.L., Linde, T.J., Gambosi, T.I dan De Zeewu, D.L. 1999. A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, **154**, 284-309.
- Jeffrey, A. 1966 *Magnetohydrodynamics*, Interscience Published : Newyork, p.34.